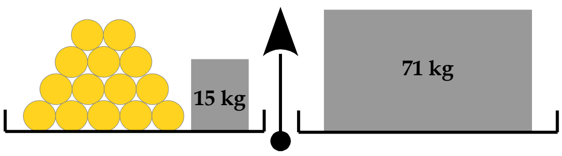
RESOLUTION D'ÉQUATIONS premier degré à une inconnue

Résoudre une équation

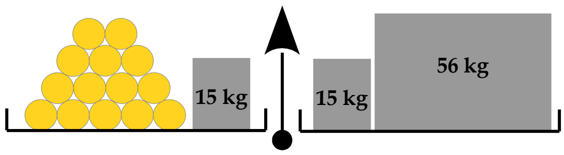
Une ***équation*** est une égalité dans laquelle un ou plusieurs nombres sont inconnus ; ces nombres inconnus sont appelés les ***inconnues*** de l'équation et sont désignées par des lettres. Voici quelques exemples :

- $2x^2 + 3y = 5x - 3$ est une équation du *second degré à deux inconnues*.
- $-2x^3 + 7x^2 - 5x - 3 = 0$ est une équation du *troisième degré à une inconnue*.
- $5x + 3y = 4x - 8z$ est une équation du *premier degré à trois inconnues*.
- $2x^2 + x^4 = \frac{2}{3}x - 1$ est une équation du *quatrième degré à une inconnue*.
- $14x + 15 = 71$ est une équation du *premier degré à une inconnue*.

Résoudre une équation c'est trouver les inconnues ; nous allons étudier dans la suite de cette leçon comment résoudre les équations ***du premier degré à une inconnue***. Supposons que l'inconnue x représente la masse un boulet ; l'égalité $14x + 15 = 71$ signifie que si nous plaçons 14 boulets identiques de masse x kg et une masse de 15 kg dans le plateau de gauche d'une balance, celle-ci sera en équilibre en plaçant 71 kg sur l'autre plateau :

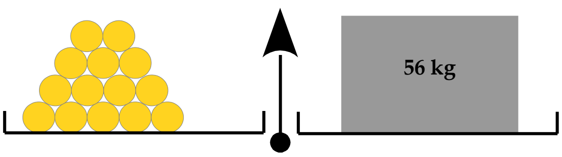


$14\,x + 15 = 71$

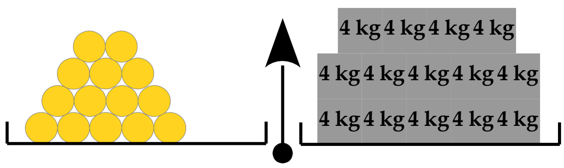


$14\,x + 15 = 15 + 56$

En enlevant 15 kg de chaque plateau nous conservons l'équilibre de la balance. Observons de plus qu'une masse de 56 kg est égale à 14 fois 4kg :

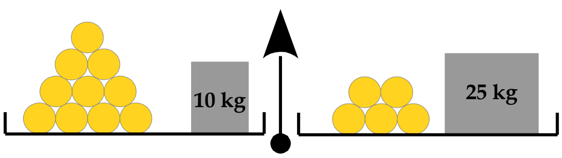


$14\,x = 56$

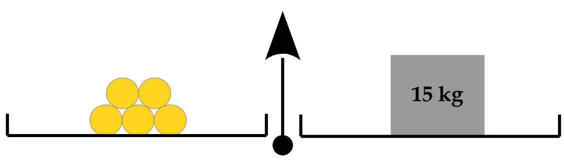


$14\,x = 14 \times 4$

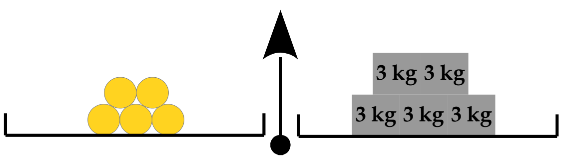
Et nous en déduisons la masse d'un boulet, à savoir $x = 4$ kg. Par cette méthode de pesée nous pouvons résoudre d'autres équations du premier degré à une inconnue, ainsi :



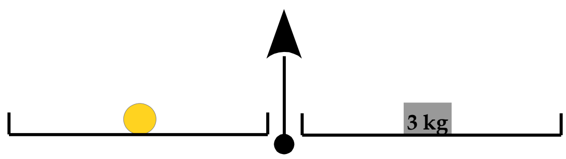
$10x + 10 = 5x + 25$



$5x = 15$



$5x = 5 \times 3$



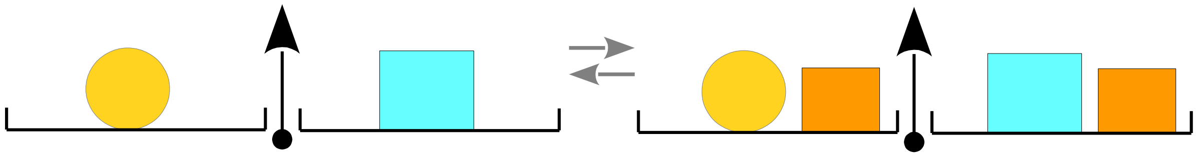
$x = 3$

Deux équations de référence

Premier modèle "*addition à trou*", exemple $x + 4 = 9$.

Résoudre cette équation est facile, on voit clairement que l'inconnue est 5. Mais remarquons que l'inconnu est le résultat d'une soustraction : $x = 9 - 4$; grâce à cela il est alors possible de résoudre une équation moins évidente comme par exemple $x + 3{,}6 = 2{,}4$ car il suffit en effet de calculer l'inconnu de la façon suivante $x = 2{,}4 - 3{,}6 = -1{,}2$. Ce procédé de calcul de l'inconnu est une conséquence de la propriété suivante :

Propriété 1. Si on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membre d'une égalité alors on obtient une égalité.



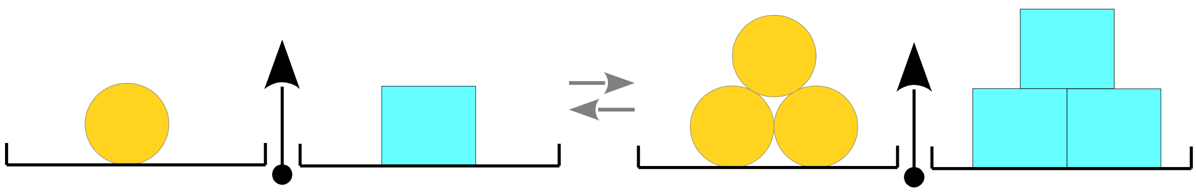
Exemple. Si $x + 3{,}6 = 2{,}4$ alors $x + 3{,}6 - 3{,}6 = 2{,}4 - 3{,}6$ et donc $x = -1{,}2$.

Corollaire. L'inconnue d'une "*addition à trou*" est la différence entre la somme et le terme connu.

Second modèle "*multiplication à trou*", exemple $x \times 3 = 12$.

Trouver l'inconnu est encore facile : c'est 4. On peut ici remarquer que l'inconnu est le résultat d'une division, ainsi $x = 12 \div 3$. Grâce à cela il est alors possible de trouver l'inconnu dans une équation moins évidente comme $x \times 3 = 7$ car il suffit de calculer ce nombre de la façon suivante $x = 7 \div 3 = \frac{7}{3}$. Ce procédé de calcul de l'inconnu est une conséquence de la propriété suivante :

Propriété 2. Si on multiplie ou divise par un même nombre les deux membre d'une égalité alors on obtient une égalité.



Exemple. Si $x \times 7 = 10$ alors $x \times 7 \div 7 = 10 \div 7$ et donc $x = \dfrac{10}{7}$.

Corollaire. L'inconnue d'une "*multiplication à trou*" est le quotient du produit par le facteur connu.

Des équations se ramenant aux deux modèles de référence

Troisième modèle $ax + b = c$, exemple $4x + 5 = 15$.

Ce modèle d'équation est ***une combinaison du premier et du second modèle.*** Pour la résoudre on procède en deux temps :

1°) On peut voir dans cette équation une forme du premier modèle $X + 5 = 15$, ainsi $X = 15 - 5$ et donc $4x = 10$.

2°) Il nous reste maintenant à résoudre l'équation du second modèle $4x = 10$ et donc $x = 10 \div 4$ soit $x = 2{,}5$.

Le nombre trouvé 2,5 est bien solution de l'équation $4x + 5 = 15$, en effet : $4 \times 2{,}5 + 5 = 10 + 5 = 15$.

Quatrième modèle $ax + b = cx + d$, exemple $3x + 4 = 5x - 9$.

Ici l'inconnue est présente des deux côtés du signe "=", il faut avant toute chose la faire ***disparaître d'un des deux côtés***. Comment faire ? Pour cela il suffit soit soustraire $3x$ aux deux membres de l'équation soit de soustraire $5x$. Par exemple dans le premier cas, nous trouvons $4 = 5x - 3x - 9$, puis en réduisant le membre de droite, on trouve $4 = 2x - 9$ ou ce qui revient au même $2x - 9 = 4$. Nous retrouvons maintenant le modèle précédent que nous savons résoudre.

Cinquième modèle « *règle de trois* », exemple $\frac{x}{3} = \frac{5}{7}$.

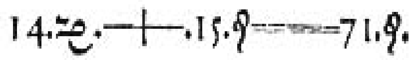
Ce modèle d'équation est un cas particulier du second modèle, nous pouvons en effet écrire :

$x \times \frac{1}{3} = \frac{5}{7}$, donc $x = \frac{5}{7} \div \frac{1}{3}$ et ainsi $x = \frac{5}{7} \times \frac{3}{1}$, d'où $x = \frac{15}{7}$.

NOTES COMPLEMENTAIRES

Les écritures des équations

Lorsque nous écrivons une équation nous utilisons des symboles (+, –, ×, ÷, =) ainsi que des lettres pour désigner les nombres inconnus. Il n'en fut pas toujours ainsi, voici une équation écrite en 1557 par le mathématicien anglais Robert Recorde ([1]) :



Record est l'inventeur des signes + et =. Les signes à la droite des nombres 14, 15 et 71, que Recorde appelle *signes cossiques*, indique la présence ou l'absence d'un nombre inconnu et son degré. Ainsi, le signe à droite du 15 et du 71 indique l'absence d'inconnue ; le signe à droite de 14 représente l'inconnu ; il s'agit donc de l'équation que nous écrivons aujourd'hui :

$$\mathbf{14}x + \mathbf{15} = \mathbf{71}.$$

Cette même équation aurait été écrite au XV$^{\text{ème}}$ par le mathématicien français Nicolas Chuquet :

$$\mathbf{14^1\ \bar{p}\ 15\ \text{égaulx à}\ 71}$$

Tartaglia, mathématicien italien du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, aurait quand à lui écrit :

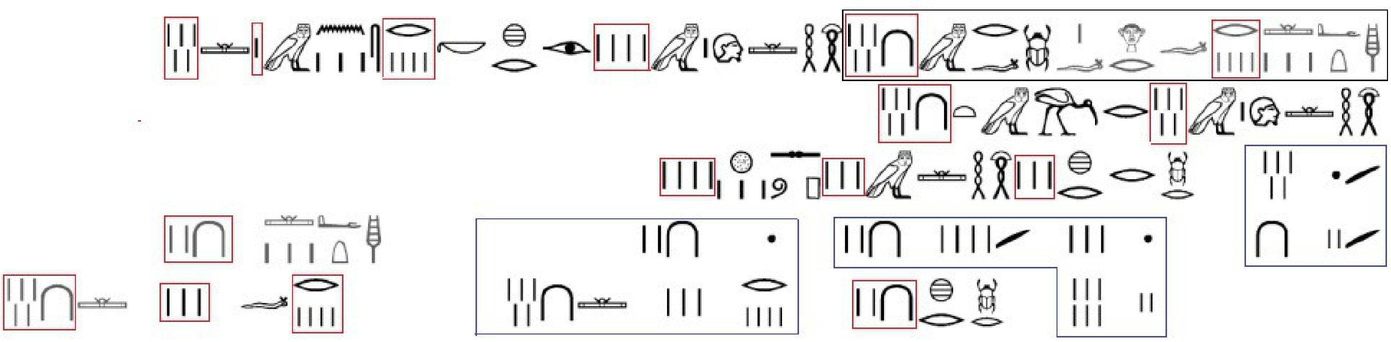
14R p 15N equale 71N

Comment résoudre ces équations sans notre formalisme algébrique ?

Résolution par la méthode de la *fausse position*

Nous trouvons dans le Papyrus de Rhind (problèmes 24 à 34) des résolutions d'équations du second modèle par la méthode de fausse position.

Problème 26. Trouver une quantité qui ajouté à son quart donnera 15.



Le problème 26 (première ligne à gauche) et sa solution en hiéroglyphes.

Solution. On choisit un nombre, ce nombre choisi peut être quelconque mais puisqu'il faut en prendre le quart il est plus judicieux de prendre 4. Le quart de ce nombre est 1. En ajoutant le nombre choisi et son quart on trouve 5. On ne trouve pas 15, mais on remarque que ***15 est le triple de 5 donc le nombre cherché est le triple de 4***, soit 12.

1 Robert **Recorde**, The Whetstone of Witte, Londre, **1557**.

Si nous traduisons ce problème avec nos notations, nous devons résoudre l'équation $x + \frac{1}{4}x = 15$. Si nous factorisons le membre de gauche nous obtenons une équation du second modèle $\frac{5}{4}\ x = 15$. Nous constatons que le nombre choisi x est ***proportionnel*** au nombre obtenu $x + \frac{1}{4}x$:

x	4	?
$x + \frac{1}{4}x$	5	15

$\times\frac{5}{4}$ $\times 3$

La méthode de fausse position s'applique donc lorsqu'il y a proportionnalité entre deux grandeurs ; d'une première tentative (fausse position) est déduite la solution (position exacte). Voici un second exemple de résolution par cette méthode datant du XV$^{\text{ème}}$ siècle ([2]) **:**

Una lansa ha la mytat et lo ters en ayga, et 9 palms defora. Ademandi can ha de 1onc. Resposta : pausa 12 a ton plaser, et la mytat et lo ters de 12 sont 10, et restan 2. Impero digas ensins : si 2 sont vengus de 12, de che venon 9 ? Et troberas 54. Et tantos pals ha aquella lansa, et es fach. Et ensins deves fayre totas autras semblans.

Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 palmes à l'extérieur. Je demande sa longueur. réponse : pose 12 à ton bon plaisir, et la moitié et le tiers de 12 sont 10, et il reste 2. Pour cela, dis aussi : si 2 sont venus de 12, de combien sont venus 9 ? Et tu trouveras 54. Et c'est le nombre de palmes de cette lance, et c'est fait. Et ainsi tu dois faire tous les autres exemples semblables.

Résolution par la méthode de la *double fausse position*

Les équations du troisième ou quatrième modèle n'étant pas liées à des situations de proportionnalité, la méthode de double fausse position est utilisée : à partir de deux tentatives (fausses positions) est déduite la solution (position exacte). Au XV$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Lucas Pacioli proposait de résoudre ceci :

Problème. Partager 44 ducats entre 3 personnes de façon que la deuxième ait le double de la première plus 4 et la troisième autant que les deux autres réunis plus 6.

Solution. Donnons à la première personne ***8 ducats***, la seconde reçoit alors $2 \times 8 + 4 = 20$ ducats et la troisième $8 + 20 + 6 = 34$ ducats. Les 62 ducats ainsi distribués excèdent de *18 ducats* la somme proposée (44 ducats). Donnons maintenant à la première personne ***6 ducats***, la seconde reçoit 16 ducats et la troisième 28 ducats. Les 50 ducats distribués excèdent de *6 ducats* la somme proposée. La solution est alors obtenue en effectuant ***le produit du*** *premier excès* ***par la*** *seconde hypothèse* ***diminué du produit du*** *second excès* ***par la*** *première hypothèse*, ***le tout divisé par la différence des*** *excès* :

$$\frac{18\times6-6\times8}{18-6} = 5 \text{ ducats.}$$

En conclusion, la première reçoit 5 ducats, la seconde 14 ducats et la troisième 25 ducats.

Remarque. Si pour le second essai nous avions donné à la première personne ***2 ducats***, la seconde aurait eu 8 ducats et la troisième 16 ducats. Les 26 ducats étant distribués, il resterait *18 ducats* de la somme proposée. La solution est alors obtenue en effectuant une moyenne pondérée :

2 Francès **Pellos**, *Lo Compendion de l'Abaco*, Turin, **1492**.

$$\frac{18\times 2+18\times 8}{18+18} = 5 \text{ ducats.}$$

Ainsi, si les deux fausses positions donnent deux excès ou deux défauts, il faut soustraire ; si elles donnent un excès et un défaut il faut ajouter. On trouve cette règle ainsi formulée par Legendre ([3]) :

Règle de deux fausses positions. Le plus de plus et moins de moins convient soustraire ; mais plus et moins, ou moins et plus, c'est le contraire.

Propriété. Etant donné l'équation $ax + b = cx + d$, notons x_1 la première position et e_1 l'excès ou défaut obtenu, x_2 la seconde position et e_2 l'excès ou défaut obtenu. On a :

$$x = \frac{e_2x_1 - e_1x_2}{e_2 - e_1}$$

Démonstration. On a d'une part $ax_1 + b = cx_1 + d + e_1$ et d'autre part $ax_2 + b = cx_2 + d + e_2$. Multiplions maintenant la première égalité par e_2 et la seconde par e_1 :

$$e_2ax_1 + e_2b = e_2cx_1 + e_2d + e_2e_1$$
$$e_1ax_2 + e_1b = e_1cx_2 + e_1d + e_1e_2$$

puis retranchons membre à membre, il vient :

$$e_2ax_1 + e_2b - e_1ax_2 - e_1b = e_2cx_1 + e_2d + e_2e_1 - e_1cx_2 - e_1d - e_1e_2$$

et en factorisant par a, b, c et d, on trouve :

$$a(e_2x_1 - e_1x_2) + b(e_2 - e_1) = c(e_2x_1 - e_1x_2) + d(e_2 - e_1)$$

regroupons dans le même membre les facteurs communs :

$$a(e_2x_1 - e_1x_2) - c(e_2x_1 - e_1x_2) = d(e_2 - e_1) - b(e_2 - e_1)$$

Factorisons à nouveau :

$$(a - c)(e_2x_1 - e_1x_2) = (d - b)(e_2 - e_1)$$

En déduit ainsi que

$$\frac{e_2x_1 - e_1x_2}{e_2 - e_1} = \frac{d - b}{a - c}$$

Ce qui prouve l'égalité annoncé dans la proposition.

Si un excès est affecté du signe positif et un défaut du signe négatif, on en déduit la règle de deux fausses positions.

Au VIème siècle le mathématiciens indien Aryabhata propose de résoudre directement des équations du quatrième modèle au moyen de la règle suivante :

Règle d'Aryabhata. Par la différence entre les objets divisez la différence des roupies que possèdent deux personnes : le quotient est la valeur d'un objet si les fortunes sont égales. ([4])

———•———

3 François **Le Gendre**, L'arithmétique en sa perfection, Paris, **1691**.
4 Léon **Rodet**, Leçons de calcul d'Âryabhata, Paris, **1879**.